1ο online μάθημα ①
26/3/2020
Εισαγωγή στην Τοπολογία

Υπενθύμιση: (X,ρ) μ.χ., $x \in X$, $\varepsilon > 0$

$B_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(y,x) < \varepsilon\}$ ανοικτή μπάλα

$\hat{B}_\rho(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(y,x) \leq \varepsilon\}$ κλειστή μπάλα

Ένα σύνολο $U \subseteq X$ λέγεται ανοικτό αν $\forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \ B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U$
(Έχουμε αποδείξει ότι κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο)

Ένα σύνολο $F \subseteq X$ λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό

Παρατήρηση: Έστω (X,ρ) μ.χ. Κάθε κλειστή μπάλα στο X είναι κλειστό σύνολο

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$
Θ.δ.ο. η κλειστή μπάλα $\hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο
Αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι το συμπλήρωμά του δηλαδή το $X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό
Έστω $a \in X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$
Τότε $a \notin \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$ δηλαδή ΔΕΝ ισχύει $\rho(a,x) \leq \varepsilon$ άρα έχουμε $\rho(a,x) > \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \rho(a,x) - \varepsilon$. Τότε $\delta > 0$
Ισχυρισμός: $B_\rho(a,\delta) \subseteq X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$
Απόδειξη: Έστω $b \in B_\rho(a,\delta)$. Τότε $\rho(b,a) < \delta$. Θα δείξουμε ότι $b \in X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$ δηλαδή ότι $\rho(b,x) > \varepsilon$. Αν αυτό δεν ισχύει δηλαδή αν $\rho(b,x) \leq \varepsilon$ τότε $\rho(a,x) \underset{\substack{\text{τριγ.}\\ \text{ανισότ.}}}{\leq} \rho(a,b) + \rho(b,x) = \rho(b,a) + \rho(b,x)$
$< \delta + \varepsilon = \rho(a,x) - \varepsilon + \varepsilon = \rho(a,x)$

Έτσι $\rho(a,x) < \rho(a,x)$ που είναι άτοπο.

Συνεπώς $\rho(b,x) > \varepsilon$ δηλαδή $b \in X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$

Έτσι έχει αποδειχθεί ότι $B_\rho(a,\delta) \subseteq X \setminus \hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$

Επομένως το σύνολο $\hat{B}_\rho(x,\varepsilon)$ είναι κλειστό

<u>1ο φυλλάδιο ασκήσεων</u>

1) a) Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1

(i) Για κάθε $x,y \in X$ $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| \geq 0$

(ii) $\rho(x,y) = 0 \iff |f(x) - f(y)| = 0 \iff f(x) = f(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{η } f \text{ είναι 1-1}}}{\iff} x = y$

(iii) $\rho(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = \rho(x,y)$ $\forall x,y \in X$

(iv) Για κάθε $x,y,z \in X$

$$\rho(x,z) = |f(x) - f(z)| = |(f(x) - f(y)) + (f(y) - f(z))| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|$$
$$= \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Συνεπώς η ρ είναι μετρική στο X.

b) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι 1-1

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x,y \in X$ με $x \neq y$ ώστε $f(x) = f(y)$

Τότε $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x)| = |0| = 0$

Συνεπώς η ιδιότητα (ii) δεν ικανοποιείται, συνεπώς η ρ δεν είναι μετρική

2) α) (i) Για κάθε $x,y \in X$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\rho(x,y)} \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\rho(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

διότι ρ
είναι μετρική

(iii) Για κάθε $x,y \in X$ ισχύει

$d(y,x) = \sqrt{\rho(y,x)} = \sqrt{\rho(x,y)} = d(x,y)$

(iv) Τριγωνική ανισότητα
Για κάθε $x,y,z \in X$ έχουμε

$d(x,z) = \sqrt{\rho(x,z)} \leq \sqrt{\rho(x,y)+\rho(y,z)} \leq \sqrt{\rho(x,y)} + \sqrt{\rho(y,z)} = d(x,y) + d(y,z)$

Αιτιολόγηση: Αν $a,b \geq 0$ τότε
$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\Leftrightarrow a+b \leq a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$ που ισχύει

Συνεπώς η d είναι μετρική

β) Η $d(x,y) = (\rho(x,y))^2$ δεν είναι εν γένει μετρική
διότι δεν ισχύει πάντα η τριγωνική ανισότητα
π.χ. Αν (X,ρ) είναι ο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $\rho(x,y) = |x-y|$
τότε $d(x,y) = |x-y|^2$ για κάθε $x,y \in X$

3) Για κάθε $x,y \in X$

(i) $\sigma(x,y) = \underset{\geq 0}{\rho(x,y)} + \underset{\geq 0}{d(x,y)} \geq 0$

(ii) Αν $\sigma(x,y) = 0$ τότε $\rho(x,y) + d(x,y) = 0$
και εφόσον $\rho(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) \geq 0$
προκύπτει $\rho(x,y) = 0$ και $d(x,y) = 0$
άρα $x = y$

Αντίστροφα $\sigma(x,x) = \rho(x,x) + d(x,x) = 0 + 0 = 0$

(iii) $\sigma(y,x) = \rho(y,x) + d(y,x) = \rho(x,y) + d(x,y) = \sigma(x,y)$ ④

(iv) Τριγωνική ανισότητα

$\forall x,y,z \in X$ έχουμε

$$\sigma(x,z) = \rho(x,z) + d(x,z) \leq (\rho(x,y) + \rho(y,z)) + (d(x,y) + d(y,z)) =$$
$$= (\rho(x,y) + d(x,y)) + (\rho(y,z) + d(y,z)) =$$
$$= \sigma(x,y) + \sigma(y,z)$$

Συνεπώς σ μετρική.

4) a) (i) Για κάθε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k) \in X$ έχουμε

$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) \geq 0$

(ii) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow \rho_i(x_i, y_i) = 0 \quad i=1,\dots,k$

διότι $\rho_i(x_i, y_i) \geq 0$

$\Leftrightarrow x_i = y_i \quad i=1,\dots,k \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$

(iii) $\rho(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(y_i, x_i) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in X$

(iv) Για κάθε $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in X$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_k)$, $\vec{z} = (z_1, \dots, z_k)$

έχουμε

$$\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, z_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\rho_i(x_i, y_i) + \rho_i(y_i, z_i)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{k} \rho_i(y_i, z_i) = \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$$

β) Έχουμε να αποδείξουμε 2 κατευθύνσεις

$\Rightarrow$) Αν $\vec{x_n} \to \vec{x}$ τότε $\rho(\vec{x_n}, \vec{x}) \to 0$

Έστω τυχόν $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ έχουμε $0 \leq \rho_{i_0}(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \leq \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_n^i, x^i)$

$= \rho(\vec{x_n}, \vec{x})$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Απο το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Εφόσον $0 \to 0$ και $\rho(\vec{x_n}, \vec{x}) \to 0$

προκύπτει ότι $\rho_{i_0}(x_n^{i_0}, x^{i_0}) \to 0$ και αποδείξαμε το ζητούμενο

$\Leftarrow$) Αν $x_n^i \xrightarrow{\rho_i} x^i$ $\forall i = 1, \dots, k$

τότε $\rho_i(x_n^i, x^i) \to 0$ $\forall$ $i = 1, \dots, k$

Εφόσον το άθροισμα k ακολουθιών πραγματικών αριθμών που συγκλίνουν στο 0 συγκλίνει επίσης στο 0

Εχουμε $\sum_{i=1}^{k} \rho_i(x_n^i, x^i) \to 0$

δηλαδή $\rho(\vec{x_n}, \vec{x}) \to 0$ $|\rho(a,b) - \rho(x,y)| \leq \rho(a,x) + \rho(y,b)$

συνεπώς $\vec{x_n} \xrightarrow{\rho} \vec{x}$

5) Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$

Εχουμε $\rho(x_n, x) \to 0$ και $\rho(y_n, y) \to 0$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 \leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(x_n, x)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(y_n, y)} \to 0$$

Συμπεραίνουμε ότι $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$

6) $$0 \leq \rho(y_n, x) \leq \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x) = \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(x_n, y_n)} + \underset{\downarrow \atop 0}{\rho(x_n, x)} \to 0$$

Αρα $\rho(y_n, x) \to 0$ δηλαδή $y_n \xrightarrow{\rho} x$

7) Θεωρούμε $X=(0,6)$ με τη μετρική $\rho(x,y) = |x-y|$

(επάγει τη σχετική μετρική στο X από τη συνήθη μετρική)

Τότε $B_\rho(3,3) = \{x\in X: |x-3|<3\} = (0,6)$

$B_\rho(5,4) = \{x\in X: |x-5|<4\} = \{x\in(0,6): 5-4<x<5+4\} =$

$= (0,6)\cap(1,9) = (1,6)$

Έτσι $0<3<4$ και η $B_\rho(5,4)$ είναι γνήσιο υποσύνολο της $B_\rho(3,3)$

8) Θυμόμαστε ότι αν $x,y\in X$ με $x\neq y$ τότε για οποιοδήποτε δ με $0<\delta\leq \frac{\rho(x,y)}{2}$ ισχύει $B_\rho(x,\delta)\cap B_\rho(y,\delta)=\emptyset$

Εφόσον τα $x_1,\dots,x_n$ είναι διαφορετικά ανά δύο

ισχύει $\rho(x_i,x_j)>0$ $\forall i,j=1,\dots,n$ με $i\neq j$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\left\{\frac{\rho(x_i,x_j)}{2},\ i,j\in\{1,\dots,n\}\ i\neq j\right\}$

Τότε $\varepsilon>0$ (ως ελάχιστο στοιχείο ενός συνόλου θετικών αριθμών)

Θέτουμε επίσης $U_i = B_\rho(x_i,\varepsilon)$ για $i=1,\dots,n$

Για κάθε $i=1,\dots,n$ έχουμε $x_i\in U_i$ και το U_i είναι ανοικτό

(ως ανοικτή μπάλα)

Δείχνουμε τώρα ότι τα σύνολα $U_1,\dots,U_n$ ξένα ανά δύο

Πράγματι αν $i,j\in\{1,\dots,n\}$ με $i\neq j$

τότε $U_i\cap U_j = B_\rho(x_i,\varepsilon)\cap B_\rho(x_j,\varepsilon)=\emptyset$ διότι

$0<\varepsilon\leq\frac{\rho(x_i,x_j)}{2}$ (σύμφωνα με την αρχική παρατήρηση)

9) α) Αν $x_n \not\xrightarrow{\rho} x$ τότε (σύμφωνα με την άρνηση του ορισμού) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

(*) Για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ ώστε $\rho(x_n, x) \geq \varepsilon$

Θα κατασκευάσουμε την υπακολουθία που θέλουμε χρησιμοποιώντας επαγωγικά την (*)

Εφαρμόζοντας την (*) για $n_0 = 1$ προκύπτει ότι υπάρχει

$k_1 \in \mathbb{N}$ (με $k_1 \geq 1$) ώστε $\rho(x_{k_1}, x) \geq \varepsilon$

Εφαρμόζοντας την (*) για $n_0 = k_1+1$ προκύπτει ότι υπάρχει

$k_2 \in \mathbb{N}$ με $k_2 \geq k_1+1$ (δηλ $k_2 > k_1$) ώστε $\rho(x_{k_2}, x) \geq \varepsilon$

Επαγωγικά αν έχει κατασκευαστεί ο k_n λόγω της (*) υπάρχει

$k_{n+1} \in \mathbb{N}$ με $k_{n+1} \geq k_n+1$ (δηλ $k_{n+1} > k_n$) ώστε $\rho(x_{k_{n+1}}, x) \geq \varepsilon$

Έτσι επαγωγικά κατασκευάστηκαν φυσικοί αριθμοί

$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

β) Έχουμε δύο κατευθύνσεις

$\Rightarrow$) Η κατεύθυνση αυτή είναι προφανής διότι αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε

και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ οποιαδήποτε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ισχύει $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$ (για την ίδια την υπακολουθία)

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στο x.

Θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο

Υποθέτουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο x

Τότε (σύμφωνα με το ερώτημα α)) υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$

της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Από την υπόθεση μας η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία

$(x_{k_{l_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ για την οποία $x_{k_{l_n}} \xrightarrow{\rho} x$

άρα $\rho(x_{k_{n}}, x) \to 0$

Αυτό είναι άτοπο εφόσον $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Επομένως $x_n \xrightarrow{\rho} x$

10) Σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x)$

Έστω λοιπόν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα (αλλά δεν γνωρίζουμε που συγκλίνει, αυτό που θέλουμε να είναι το όριο της το $f(x)$)

Έστω $a \in Y$ ώστε $f(x_n) \xrightarrow{d} a$

Στόχος είναι να δείξουμε ότι $a = f(x)$

Υποθέτουμε ότι $a \neq f(x)$

Ορίζουμε ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $y_n = \begin{cases} x, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ x_k, & \text{αν } n \text{ άρτιος με } n=2k \end{cases}$

(Δηλ $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots) = (x, x_1, x, x_2, x, x_3, \dots)$)

Εφόσον $y_{2n-1} = x \xrightarrow{\rho} x$ και $y_{2n} = x_n \xrightarrow{\rho} x$ προκύπτει ότι $y_n \xrightarrow{\rho} x$

Εφόσον $f(y_{2n-1}) = f(x) \xrightarrow{d} f(x)$ και $f(y_{2n}) = f(x_n) \xrightarrow{d} a$ και $a \neq f(x)$

προκύπτει ότι η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συγκλίνουσα. Άτοπο.

Συνεπώς $a = f(x)$ δηλαδή $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x)$

Επομένως η f είναι συνεχής στο x